Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра математической логики и теории алгоритмов

Дипломная работа
студента 507 группы Разенштейна Ильи

Покрытия кратчайших путей в ненаправленных графах

Научный руководитель: к.ф.-м.н. М.А. Бабенко
Рецензент: PhD Ю. Макарычев

Москва
2012

Содержание

1 Введение **2**

1.1 Постановка задач 2

1.2 Задача об ε-покрытиях 3

1.2.1 Оракул больших расстояний 3

1.2.2 Вложение метрик в ℓ_1 3

1.3 Задача о системах пересадок 4

2 Задача об ε-покрытиях **5**

2.1 Графы общего вида 5

2.1.1 Размерность Вапника–Червоненкиса и ε-сети 5

2.1.2 Верхняя оценка 6

2.1.3 Нижняя оценка 7

2.2 Графы ограниченной древесной ширины 8

2.3 Приложения 10

2.3.1 Оракул больших расстояний 10

2.3.2 Вложение метрик в ℓ_1 11

3 Системы пересадок в булевом кубе **14**

4 Открытые вопросы **19**

1 Введение

1.1 Постановка задач

Пусть $G = (V, E, w)$ — взвешенный ненаправленный граф с неотрицательными весами на ребрах. Граф G порождает две метрики на вершинах: обозначим $d(v_1, v_2)$ кратчайшее расстояние между вершинами v_1 и v_2, а $d_{\text{unw}}(v_1, v_2)$ — кратчайшее расстояние в невзвешенной версии G.

Поставим две задачи.

Задача 1 (Задача об ε-покрытиях). *Пусть $\varepsilon > 0$ — положительный параметр. Назовем множество вершин $N \subseteq V$* ε-покрытием, *если для любых вершин $v_1, v_2 \in V$ таких, что $d_{\text{unw}}(v_1, v_2) \geq \varepsilon n$, найдется вершина $u \in N$ такая, что $d(v_1, v_2) = d(v_1, u) + d(u, v_2)$.*

Каков минимальный размер ε-покрытия графа G?

Задача 2 (Задача о системах пересадок). *Назовем отображение $L\colon V \to 2^V$* системой пересадок, *если для любых вершин $v_1, v_2 \in V$ найдется вершина $u \in L(v_1) \cap L(v_2)$*

такая, что $d(v_1, v_2) = d(v_1, u) + d(u, v_2)$. Размером *системы пересадок L назовем величину $\sum_{v \in V} |L(v)|$.*

Каков минимальный размер системы пересадок графа G?

1.2 Задача об ε-покрытиях

В разделе 2 мы изучаем задачу об ε-покрытиях. В разделе 2.1 с помощью теории размерности Вапника – Червоненкиса [VC71] мы доказываем существование ε-покрытий размера $O(\log(1/\varepsilon)/\varepsilon)$. Мы используем наблюдение из [ADF+11]: система уникальных кратчайших путей имеет маленькую размерность Вапника – Червоненкиса. Также мы доказываем сверхлинейную нижнюю оценку $\omega(1/\varepsilon)$ на размер ε-покрытия. Для этого мы используем плотностную версию теоремы Хейлса – Джуетта [Pol09] из аддитивной комбинаторики. Отметим, что в статье [Alo10] применяется такая же техника для похожей комбинаторной задачи. Далее в разделе 2.2 мы доказываем линейную верхнюю оценку $O(1/\varepsilon)$ на размер ε-покрытия в графах ограниченной древесной ширины.

Далее в разделе 2.3 мы описываем два приложения маленьких ε-покрытий.

1.2.1 Оракул больших расстояний

Пусть $G = (V, E)$ — ненаправленный *невзвешенный* граф. Мы хотим построить структуру данных, которая по паре вершин $v_1, v_2 \in V$ сообщает одно из двух: если $d(v_1, v_2) < \varepsilon n$, то структура должна сообщить об ошибке, если же $d(v_1, v_2) \geq \varepsilon n$, то структура должна сообщить точное значение $d(v_1, v_2)$.

В разделе 2.3.1 мы строим для любых $\varepsilon, \delta > 0$ такую структуру данных размера $O(n^{1+\delta})$, которая умеет отвечать на запрос за константное время. Для этого мы комбинируем факт наличия маленьких ε-покрытий и оракул Торупа-Цвика [TZ05].

Отметим, что для дорожных сетей существуют похожие структуры данных, однако они работают доказуемо хорошо лишь в предположении ограниченности шоссейной размерности графа [BFM+07, AFGW10].

1.2.2 Вложение метрик в ℓ_1

Сначала напомним определение ℓ_p-нормы (здесь и далее $p \geq 1$).

Определение 1. *Обозначим ℓ_p^d пространство $\mathbb{R}^d$ с нормой $||x||_d := \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p\right)^{1/p}$.*

Определение 2. *Обозначим ℓ_p бесконечномерный аналог ℓ_p^d. А именно, будем рассматривать бесконечные последовательности вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots,$*

для которых выполнено $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$. Норму в этом пространстве зададим такую:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Пусть $G = (V, E, w)$ — взвешенный ненаправленный граф. Будем интересоваться, насколько хорошо можно приблизить метрику d ℓ_1-нормой. Следующая классическая теорема дает оптимальную оценку.

Теорема 1 ([Bou85]). *Существует отображение $f\colon V \to \ell_1^{O(\log^2 n)}$ такое, что для любых вершин $v_1, v_2 \in V$ выполнены следующие неравенства:*

$$\frac{d(v_1, v_2)}{O(\log n)} \le \|f(v_1) - f(v_2)\|_1 \le d(v_1, v_2).$$

Но что если мы интересуемся только сохранением расстояний между вершинами $v_1, v_2 \in V$ такими, что $d_{\mathrm{unw}}(v_1, v_2) \ge \varepsilon n$? В разделе 2.3.2 мы докажем такую теорему.

Теорема 2. *Существует отображение $f\colon V \to \ell_1^{O(\log n + \log^2(1/\varepsilon))}$ такое, что для любых вершин $v_1, v_2 \in V$ выполнено*

$$\frac{d(v_1, v_2)}{O(\log(1/\varepsilon))} \le \|f(v_1) - f(v_2)\|_1,$$

и если $d_{\mathrm{unw}}(v_1, v_2) \ge \varepsilon n$, то дополнительно выполнено

$$\|f(v_1) - f(v_2)\|_1 \le d(v_1, v_2).$$

В работе [ABC$^+$05] доказана более сильная версия этой теоремы, но наше доказательство непосредственно обобщается на специальные классы метрик, для которых теорему 1 можно усилить (например, на метрики отрицательного типа [ALN05]).

1.3 Задача о системах пересадок

Задача о системах пересадок изучалась как с теоретической, так и с практической точки зрения. В работе [CHKZ02] приводится полиномиальный приближенный алгоритм, который строит $O(\log |V|)$-приближение для систем пересадок минимального размера. В работе [AFGW10] доказывается, что в графах ограниченной шоссейной размерности существуют системы пересадок почти линейного размера. В работе [ADGW11] показывается, что системы пересадок можно с успехом использовать для практического вычисления расстояний в дорожных сетях континентального размера.

Рассмотрим граф B_n булева куба $\{0,1\}^n$: вершины соединим ребром, если они отличаются ровно в одной позиции. В разделе 3 мы получаем практически точную оценку на размер минимальной системы пересадок для B_n. Мы доказываем, что он равен $2.5^{(1+o(1))n}$.

2 Задача об ε-покрытиях

2.1 Графы общего вида

В этом разделе мы докажем две теоремы. Утверждение первой теоремы состоит в наличии ε-покрытий маленького размера.

Теорема 3. *В любом взвешенном ненаправленном графе G есть ε-покрытие размера $O(\log(1/\varepsilon)/\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$. Более того, случайное множество вершин размера $O(\log(1/\varepsilon)/\varepsilon)$ с высокой вероятностью является ε-покрытием.*

Возникает вопрос: можно ли улучшить оценку $O(\log(1/\varepsilon)/\varepsilon)$ до $O(1/\varepsilon)$? Утверждение второй теоремы состоит в том, что это сделать нельзя.

Теорема 4. *Для любого положительного $C > 0$ существуют ненаправленный взвешенный граф G и положительное $\varepsilon > 0$ такие, что любое ε-покрытие в G имеет размер по крайней мере C/ε.*

Теорема 3 доказывается с помощью понятия размерности Вапника – Червоненкиса. В разделе 2.1.1 мы напомним нужные нам для этого определения и утверждения. В разделе 2.1.2 мы докажем теорему 3. В разделе 2.1.3 мы докажем теорему 4 с помощью плотностной версии теоремы Хейлса – Джуетта.

2.1.1 Размерность Вапника – Червоненкиса и ε-сети

Пусть X — конечное множество. Пусть $R \subseteq 2^X$ — система подмножеств X. Следующие определения были даны в работе [VC71] для формулировки и доказательства равномерного варианта закона больших чисел.

Определение 3. *Будем говорить, что подмножество $U \subseteq X$* разбивается *R, если для любого подмножества $V \subseteq U$ найдется элемент $W \in R$ такой, что $W \cap U = V$.*

Определение 4. *Будем говорить, что пара (X, R) имеет размерность Вапника – Червоненкиса d, если максимальный размер подмножества X, которое разбивается, равен d.*

Известно, что малость размерности Вапника – Червоненкиса является очень сильным свойством. Например, она гарантирует наличие маленьких так называемых ε-сетей.

Определение 5. *Пусть μ — вероятностная мера на X, а $0 < \varepsilon < 1$. Тогда подмножество $U \subseteq X$ называется* ε-сетью *тройки (X, μ, R), если для любого $V \in R$ такого, что $\mu(V) \geq \varepsilon$, U пересекается с V.*

С помощью вероятностного метода [AS92] легко доказать следующую верхнюю оценку на размер ε-сети.

Теорема 5. *Для любой тройки (X, μ, R) существует ε-сеть размера $O(\log|R|/\varepsilon)$.*

Доказательство. Будем выбирать элементы X независимо по мере μ. Пусть мы выбрали k элементов. Тогда для каждого $V \in R$ такого, что $\mu(V) \geq \varepsilon$, вероятность того, что никакой из выбранных элементов его не заденет, не превосходит $(1-\varepsilon)^k$.

Таким образом, вероятность того, что хотя бы какой-то элемент R большой меры будет непокрыт, не превосходит
$$|R| \cdot (1-\varepsilon)^k.$$
Можно взять $k = O(\log|R|/\varepsilon)$ так, чтобы эта вероятность не превосходила единицы. □

Однако, утверждение теоремы 5 можно существенно усилить, если у пары (X, R) маленькая размерность Вапника – Червоненкиса.

Теорема 6 ([HW86]). *Пусть у пары (X, R) размерность Вапника – Червоненкиса равна d. Тогда для любой вероятностной меры μ на X и для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует ε-сеть тройки (X, μ, R) размера $n := O(d \cdot \log(1/\varepsilon)/\varepsilon)$. Более того, если выбрать n независимых элементов X по мере μ, то они с высокой вероятностью будут образовывать ε-сеть.*

Хорошо записанные доказательства теоремы 6 можно найти в учебниках [AS92] и [Mat02].

2.1.2 Верхняя оценка

В этом разделе мы докажем теорему 3. Для этого мы сначала пошевелим веса ребер w так, чтобы все кратчайшие пути стали уникальными.

Теперь мы воспользуемся наблюдением из [ADF$^+$11]. Для полноты мы приведем его вместе с доказательством.

Теорема 7 ([ADF$^+$11]). *Пусть $G = (V, E, w)$ — взвешенный ненаправленный граф, в котором все кратчайшие пути уникальны. Тогда размерность Вапника – Червоненкиса системы кратчайших путей G (как множеств вершин) не превосходит двух.*

Доказательство. Нам надо доказать, что никакое множество из трех вершин не разбивается кратчайшими путями. Рассмотрим какое-то множество $\{v_1, v_2, v_3\}$ вершин. Действительно, если никакой кратчайший путь не проходит через все $\{v_1, v_2, v_3\}$, то все доказано. Пусть такой путь P найдется. Не умаляя общности, можно считать, что вершина v_2 лежит на этом пути между v_1 и v_3. Но тогда в силу уникальности кратчайших путей нельзя получить множество $\{v_1, v_3\}$ как ограничение какого-то кратчайшего пути на $\{v_1, v_2, v_3\}$. □

Остается заметить, что доказательство теоремы 3 получается непосредственной комбинацией теоремы 7 и теоремы 6.

2.1.3 Нижняя оценка

В этом разделе мы докажем теорему 4. Доказательство является простым сведением к глубокой теореме из аддитивной комбинаторики. Для ее формулировки нам понадобятся следующие определения.

Определение 6. *Элементы $[k]^n$ будем называть* точками.

Определение 7. *Будем называть подмножество $L \subseteq [k]^n$* комбинаторной прямой, *если выполняются следующие условия:*

- *В L ровно k точек $l_1, l_2, \ldots, l_k$,*
- *Существует непустое множество $U \subseteq [n]$ такое, что ограничения всех точек L на $[n] \setminus U$ одинаковы, а у каждого l_i на всех позициях U стоит i.*

Теперь мы готовы сформулировать плотностную версию теоремы Хейлса–Джуетта [Pol09].

Теорема 8. *Для любого натурального k и вещественного $\delta > 0$ найдется натуральное n_0 такое, что для любого $n \geq n_0$ любое подмножество $[k]^n$ размера $\delta \cdot k^n$ содержит комбинаторную прямую.*

Теперь все готово для доказательства теоремы 4.

Возьмем $k = \lceil 2C \rceil$ и $\delta = 1/2$. Тогда теорема 8 дает нам какое-то n_0. Теперь построим граф G. Его вершинами будут точки из множества $[k]^{n_0}$. Опишем теперь, как будут выглядеть его ребра. Пусть $v = (v_1, v_2, \ldots, v_{n_0}) \in [k]^{n_0}$. Каждое непустое $U \subseteq [n_0]$ может давать до двух ребер, выходящих из v. Во-первых, если не все v_i для $i \in U$ одинаковы, то ребер соответствующих U из v не выходит. В противном случае рассмотрим два кортежа $u = (u_1, u_2, \ldots, u_{n_0})$ и $w = (w_1, w_2, \ldots, w_{n_0})$, которые задаются так:

$$u_i = \begin{cases} v_i - 1, & i \in U, \\ v_i, & i \notin U. \end{cases}$$

$$w_i = \begin{cases} v_i + 1, & i \in U, \\ v_i, & i \notin U. \end{cases}$$

Мы добавляем ребро из v, ведущее в u, если $u \in [k]^{n_0}$. Аналогично поступаем с w. Веса в G положим единичными.

Итак, граф G готов. Во-первых, видно, что комбинаторным прямым в $[k]^{n_0}$ соответствуют (уникальные) кратчайшие пути в графе G. Возьмем $\varepsilon = 1/k^{n_0-1}$. Тогда нам необходимо покрыть по крайней мере все комбинаторные прямые. Но из теоремы 8 следует, что любое такое покрытие должно быть по крайней мере размера $k^{n_0}/2$. В силу выбора k теорема доказана.

2.2 Графы ограниченной древесной ширины

В этом разделе мы докажем, что у графов ограниченной древесной ширины есть ε-покрытия размера $O(1/\varepsilon)$. Для этого сначала напомним определение древесной ширины.

Определение 8. Древесной декомпозицией ширины k *ненаправленного графа* $G = (V, E)$ *называется пара* (T, φ), *где* $T = (VT, ET)$ *— ненаправленное дерево, а* $\varphi\colon VT \to 2^V$ *— отображение из вершин* T *в подмножества вершин* G, *которая удовлетворяет следующим требованиям:*

- *для любой вершины дерева* $v \in VT$ *размер* $\varphi(v)$ *не превосходит* $k+1$,
- *для любого ребра* $e \in E$ *найдется вершина дерева* $v \in VT$ *такая, что оба конца* e *лежат в* $\varphi(v)$,
- *для любой вершины графа* $v \in V$ *множество вершин дерева* $u \in VT$ *таких, что* $v \in \varphi(u)$ *образует связный подграф* T.

Определение 9. Древесной шириной *ненаправленного графа* G *называется наименьшая ширина древесной декомпозиции* G.

Теперь сформулируем основную теорему этого раздела.

Теорема 9. *Пусть* $G = (V, E, w)$ *— взвешенный ненаправленный граф с древесной шириной* k. *Тогда у* G *существует* ε*-покрытие размера* $O(k^2/\varepsilon)$.

Доказательство. Мы докажем более сильное утверждение: с помощью $O(k^2/\varepsilon)$ вершин можно покрыть *все связные подмножества вершин* G *размера* εn.

Сначала установим истинность этого утверждения для деревьев.

Лемма 1. *Пусть* $T = (VT, ET)$ *— ненаправленное дерево. Тогда найдется множество из* $O(1/\varepsilon)$ *вершин, которое покрывает все связные подмножества* T *из* εn *вершин.*

Доказательство. Будем строить искомое множество вершин жадным алгоритмом. Подвесим T за какую-нибудь вершину $r \in VT$. Теперь всем вершинам можно сопоставить *глубину*: расстояние до r. Будем поддерживать список непокрытых связных множеств из εn вершин. Каждому из этих множеств можно сопоставить его *корень*: элемент множества с минимальной глубиной. На каждом шаге из непокрытых множеств будем выбирать множество с наиболее глубоким корнем и включать этот корень в ответ. Нетрудно убедиться, что множества, которые соответствуют двум корням, которые мы добавили в ответ, не пересекаются. Отсюда получаем оценку $O(1/\varepsilon)$ на размер ответа. □

Теперь перейдем к доказательству теоремы. Для этого нам потребуется простой факт про древесную декомпозицию.

Лемма 2. *Пусть $G = (V, E)$ — ненаправленный граф с древесной шириной k. Тогда у G существует древесная декомпозиция ширины k такая, что в дереве не более n вершин.*

Доказательство. Рассмотрим древесную декомпозицию (T, φ) ширины k наименьшего размера. Для любых двух вершин $u_1, u_2 \in VT$, которые соединены ребром, выполнено $\varphi(u_1) \not\subseteq \varphi(u_2)$, $\varphi(u_2) \not\subseteq \varphi(u_1)$, так как в противном случае эти две вершины можно стянуть и получить древесную декомпозицию ширины k меньшего размера.

Теперь докажем, что $|VT| \leq n$. Предположим противное. Мы будем удалять листы T, поддерживая инвариант, который изначально выполнен по определению древесной декомпозиции: для любой вершины $v \in V$ множество $\{u \in VT \mid v \in \varphi(u)\}$ связно. На очередном шаге выберем некоторый лист $u \in T$. Пусть u' — его сосед в T. Так как $\varphi(u) \not\subseteq \varphi(u')$ и выполнен инвариант, то получаем, что найдется вершина $v \in \varphi(u)$, которая не содержится ни в каком множестве $\varphi(u'')$ при $u \neq u''$. Если мы удалим лист u из T, то инвариант по-прежнему будет выполняться. Таким образом, через n шагов мы удалим все дерево, так как на каждом шаге количество вершин G, которое присутствует в текущем дереве уменьшается по крайней мере на один. Следовательно, наше предположение не верно. □

Рассмотрим древесную декомпозицию (T, φ) ширины k. Рассмотрим для связного множества из εn вершин в G его образ в T. Это будет связное множество размера по крайней мере $\Omega(\varepsilon n/k)$ по определению древесной декомпозиции. По лемме 2 можно считать, что размер T не превосходит n вершин. Пользуясь леммой 1, получаем, что все эти образы можно покрыть $O(k/\varepsilon)$ вершинами T. Дальше рассмотрев объединение всех множеств $\varphi(\cdot)$ для вершин покрытия, видим, что это объединение является искомым покрытием. Но его размер не превосходит $O(k^2/\varepsilon)$ по определению древесной ширины. □

2.3 Приложения

2.3.1 Оракул больших расстояний

В этом разделе мы будем строить оракул для больших расстояний. Пусть $G = (V, E)$ — *невзвешенный* ненаправленный граф. Пусть $0 < \varepsilon, \delta < 1$ — какие-то константы.

Следующая теорема является простым следствием теоремы 3.

Теорема 10. *Существует оракул размера $O(n)$, который по вершинам $v_1, v_2 \in V$ за константное время сообщает некоторое число. При этом, если $d(v_1, v_2) \geq \varepsilon n$, то это число равно $d(v_1, v_2)$.*

Доказательство. Пусть U — ε-покрытие G размера $O(\log(1/\varepsilon)/\varepsilon) = O(1)$. Сохраним для каждой вершины G расстояния до всех вершин из U. Когда нам поступает запрос (v_1, v_2), мы сообщаем $\min_{u \in U} d(v_1, u) + d(u, v_2)$.

Из определения ε-покрытия видно, что если $d(v_1, v_2) \geq \varepsilon n$, то

$$\min_{u \in U} d(v_1, u) + d(u, v_2) = d(v_1, v_2).$$

□

Чтобы построить оракул, который отличает ситуацию $d(v_1, v_2) < \varepsilon n$ от $d(v_1, v_2) \geq \varepsilon n$, нам понадобится оракул Торупа-Цвика [TZ05].

Теорема 11 ([TZ05]). *Для любого натурального k существует оракул размера $O(kn^{1+1/k})$, который за время $O(k)$ умеет выдавать $(2k-1)$-приближение к расстояниям, то есть, если на вход подаются две вершины v_1, v_2, то на выход выдается число D такое, что*

$$d(v_1, v_2) \leq D \leq (2k-1) \cdot d(v_1, v_2).$$

Теперь мы покажем, как можно скомбинировать теорему 10 и теорему 11.

Теорема 12. *Существует оракул размера $O(n^{1+\delta})$, который по двум вершинам v_1, v_2 за константное время сообщает одно из двух. Если $d(v_1, v_2) < \varepsilon n$, то оракул сообщает об ошибке. Если $d(v_1, v_2) \geq \varepsilon n$, то оракул сообщает точное значение $d(v_1, v_2)$.*

Доказательство. Построим оракул Торупа-Цвика (из теоремы 11) для $k = \lceil 1/\delta \rceil$. Его размер будет составлять $O(n^{1+\delta})$. Обозначим $\varepsilon' = \varepsilon/(2k-1)$. С помощью этого оракула мы можем отбраковать пары, для которых $d(v_1, v_2) < \varepsilon' n$, при этом оставив пары, для которых $d(v_1, v_2) \geq \varepsilon n$.

Далее с помощью оракула из теоремы 10, построенного для ε', мы за константное время сможем найти точное значение $d(v_1, v_2)$. □

2.3.2 Вложение метрик в ℓ_1

Пусть $G = (V, E, w)$ — взвешенный ненаправленный граф. Он задает две метрики: d — кратчайшее расстояние между вершинами и d_{unw} — кратчайшее расстояние между вершинами в невзвешенной версии G.

Мы хотим построить отображение $f : V \to \ell_1$ такое, что для любых вершин $v_1, v_2 \in V$ таких, что $d_{\mathrm{unw}}(v_1, v_2) \geq \varepsilon n$ выполняются неравенства

$$\frac{d(v_1, v_2)}{D} \leq \|f(v_1) - f(v_2)\|_1 \leq d(v_1, v_2),$$

где D — как можно меньшая величина (она называется *искажением*).

Если взять $\varepsilon = 1/n$, то условие $d_{\mathrm{unw}}(v_1, v_2) \geq \varepsilon n$ становится тривиальным. Чтобы сформулировать известные результаты о вложении метрик для случая $\varepsilon = 1/n$, нам понадобятся несколько определений.

Определение 10. Размерность удвоения d *— это минимальное натуральное k такое, что любое подмножество V диаметра Δ можно покрыть 2^k подмножествами диаметра $\Delta/2$.*

Определение 11. *Скажем, что метрика d является* метрикой отрицательного типа, *если $\sqrt{d}$ изометрически вкладывается в ℓ_2.*

Теперь сформулируем известные результаты для случая $\varepsilon = 1/n$.

Теорема 13. *В случае $\varepsilon = 1/n$ верны следующие результаты.*

- *[Bou85] Если d — произвольная метрика, то*

$$D = O(\log n).$$

- *[Rao99] Если граф G — планарный, то*

$$D = O\left(\sqrt{\log n}\right).$$

- *[GKL03] Если d — метрика с ограниченной размерностью удвоения, то*

$$D = O\left(\sqrt{\log n}\right).$$

- *[ALN05] Если d — метрика отрицательного типа, то*

$$D = O\left(\sqrt{\log n} \log\log n\right).$$

Пользуясь теоремой 3, мы докажем мета-теорему, которая позволит нам обобщить теорему 13 на случай произвольного ε, заменяя в оценках на D все вхождения n на $1/\varepsilon$.

Теорема 14. *Пусть граф G таков, что для любого k-элементного подмножества $V' \subseteq V$ существует отображение $g\colon V' \to \ell_1^{t(k)}$ такое, что для любой пары вершин $v_1, v_2 \in V'$ выполнены неравенства*

$$\frac{d(v_1, v_2)}{D(k)} \le \|g(v_1) - g(v_2)\|_1 \le d(v_1, v_2).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует отображение $f\colon V \to \ell_1^{O(\log n) + t(O(\log(1/\varepsilon)/\varepsilon))}$ такое, что для любой пары $v_1, v_2 \in V$ выполнено

$$\frac{d(v_1, v_2)}{O(D(O(\log(1/\varepsilon)/\varepsilon)))} \le \|f(v_1) - f(v_2)\|_1,$$

а для любой пары $v_1, v_2 \in V$ такой, что $d_{\mathrm{unw}}(v_1, v_2) \ge \varepsilon n$ выполнено

$$\|f(v_1) - f(v_2)\|_1 \le d(v_1, v_2).$$

Доказательство. С помощью теоремы 3 выберем ε-покрытие $U \subseteq V$ размера $m := O(\log(1/\varepsilon)/\varepsilon)$. По условию теоремы существует вложение $g\colon U \to \ell_1^{t(m)}$ такое, что для любых $u_1, u_2 \in U$ выполнено

$$\frac{d(u_1, u_2)}{D(m)} \le \|g(u_1) - g(u_2)\|_1 \le d(u_1, u_2).$$

Теперь продолжим g на все V, пока не заботясь о размерности образа. Для этого обозначим $p(v)$ для $v \in V$ ближайшую к v в смысле d вершину из U. Обозначим $e(v)$ для $v \in V$ свежий базисный вектор из ℓ_1. Продолжение g будет устроено так:

$$f(v) := \frac{1}{3} \cdot (g(p(v)) + e(v) \cdot d(v, p(v))).$$

Пусть $v_1, v_2 \in V$. Оценим $\|f(v_1) - f(v_2)\|_1$ снизу.

$$\begin{aligned}\|f(v_1) - f(v_2)\|_1 = \frac{1}{3} \cdot (d(v_1, p(v_1)) + d(v_2, p(v_2)) + \|g(p(v_1)) - g(p(v_2))\|_1) \ge \\ \ge \frac{1}{3} \cdot \left(d(v_1, p(v_1)) + d(v_2, p(v_2)) + \frac{d(p(v_1), p(v_2))}{D(m)}\right) \ge \\ \ge \frac{1}{3} \cdot \frac{d(v_1, p(v_1)) + d(v_2, p(v_2)) + d(p(v_1), p(v_2))}{D(m)} \ge \frac{d(v_1, v_2)}{3 \cdot D(m)}\end{aligned}$$

Пусть теперь $v_1, v_2 \in V$ такие, что $d_{\mathrm{unw}}(v_1, v_2) \ge \varepsilon n$. Тогда по определению ε-покрытия найдется $u \in U$ такая, что $d(v_1, v_2) = d(v_1, u) + d(u, v_2)$.

Оценим $\|f(v_1) - f(v_2)\|_1$ сверху.

$$\begin{aligned}\|f(v_1) - f(v_2)\|_1 = \frac{1}{3} \cdot (d(v_1, p(v_1)) + d(v_2, p(v_2)) + \|g(p(v_1)) - g(p(v_2))\|_1) \le \\ \le \frac{1}{3} \cdot (d(v_1, p(v_1)) + d(v_2, p(v_2)) + d(p(v_1), p(v_2))) \le \\ \le \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot (d(v_1, p(v_1)) + d(v_2, p(v_2))) + d(v_1, v_2)) \le \\ \le \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot (d(v_1, u) + d(v_2, u)) + d(v_1, v_2)) \le d(v_1, v_2).\end{aligned}$$

Таким образом, оба неравенства из условия теоремы доказаны. Осталось разобраться с размерностью образа. Образ построенного f имеет размерность $t(m) + n$. Мы покажем, как можно уменьшить ее до $t(m) + O(\log n)$.

Посмотрим на f как на отображение $f\colon V \to \ell_1^n \oplus \ell_1^{t(m)}$, где

$$f(v) = ((0, 0, \dots, 0, d(v, p(v)), 0, 0, \dots, 0), g(p(v))) =: f'(v) \oplus g(p(v)).$$

В первой компоненте $d(v, p(v))$ стоит на месте, которое соответствует вершине v.

Отображение $f'(v)$ задает на V метрику специального вида. А именно, метрику вида $\rho(v_1, v_2) = a_{v_1} + a_{v_2}$, где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — неотрицательные числа. Таким образом, для доказательства теоремы с меньшей размерностью образа нам достаточно понизить размерность f', по возможности не сильно изменив метрику ρ.

Лемма 3. *Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — неотрицательные числа. Рассмотрим метрику $d(i, j) = a_i + a_j$. Тогда существует отображение $f\colon [n] \to \ell_1^{O(\log n)}$ такое, что для всех $i, j \in [n]$*

$$\frac{d(i,j)}{3} \le \|f(i) - f(j)\|_1 \le d(i, j).$$

Доказательство. Из теории кодирования известно, что существует подмножество $C \subseteq \{0,1\}^l$ размера n такое, что расстояние Хемминга между любыми двумя элементами C не меньше $l/3$, где $l = O(\log n)$.

Будем строить отображение $f\colon [n] \to \ell_1^{2l}$. Для этого обозначим $\varphi\colon [n] \to C$ какую-нибудь биекцию.

Теперь положим для $i \in [n], j \in [l], k \in \{0, 1\}$

$$f(i)_{2j-k} = \begin{cases} a_i/l, & k = \varphi(i)_j, \\ 0, & k \ne \varphi(i)_j. \end{cases}$$

Получаем, что

$$\frac{\|\varphi(i) - \varphi(j)\|_1}{l} \cdot (a_i + a_j) \le \||f(i) - f(j)\|_1 \le a_i + a_j.$$

Так как $\|\varphi(i) - \varphi(j)\|_1 \ge l/3$, то получаем требуемые неравенства.

□

□

Теперь получим следствие из теоремы 13 и теоремы 14.

Теорема 15. *Для произвольного $\varepsilon > 0$ верны следующие результаты.*

- *Если d — произвольная метрика, то*

$$D = O(\log(1/\varepsilon)).$$

- *Если граф G — планарный, то*

$$D = O\left(\sqrt{\log(1/\varepsilon)}\right).$$

- *Если d — метрика с ограниченной размерностью удвоения, то*

$$D = O\left(\sqrt{\log(1/\varepsilon)}\right).$$

- *Если d — метрика отрицательного типа, то*

$$D = O\left(\sqrt{\log(1/\varepsilon)}\log\log(1/\varepsilon)\right).$$

3 Системы пересадок в булевом кубе

В этом разделе мы покажем, что минимальный размер системы пересадок для графа B_n равен $2.5^{(1+o(1))n}$. Мы будем отождествлять $\{0,1\}^n$ и подмножества $[n]$. Для вершин $i, j \in \{0,1\}^n$ обозначим $\mathcal{P}(i,j)$ множество вершин, которые лежат на кратчайших путях из i в j. Обозначим $d(i,j)$ расстояние между вершинами i и j в графе B_n.

Обозначим минимальный размер системы пересадок $\mathbf{OPT}$. Составим целочисленную программу, решение которой равно $\mathbf{OPT}$.

$$\begin{cases} x_{v,S} \in \{0,1\} & \forall\, v \in \{0,1\}^n, S \subseteq \{0,1\}^n, \\ \sum_{\substack{i,j \in S \\ v \in \mathcal{P}(i,j)}} x_{v,S} \geq 1 & \forall\, i,j \in \{0,1\}^n, \\ \sum_{v,S} |S| \cdot x_{v,S} \to \min. \end{cases} \tag{1}$$

Смысл переменных $x_{v,S}$ следующий: в оптимальном решении $x_{v,S} = 1$ тогда и только тогда, когда $\{w \in \{0,1\}^n \mid v \in L(w)\} = S$.

Рассмотрим следующую линейную релаксацию (1). Обозначим ее оптимальное решение $\mathbf{LP}$. Так как линейная программа является релаксацией целочисленной, то имеем $\mathbf{OPT} \geq \mathbf{LP}$.

$$\begin{cases} x_{v,S} \geq 0 & \forall\, v \in \{0,1\}^n, S \subseteq \{0,1\}^n, \\ \sum_{\substack{i,j \in S \\ v \in \mathcal{P}(i,j)}} x_{v,S} \geq 1 & \forall\, i,j \in \{0,1\}^n, \\ \sum_{v,S} |S| \cdot x_{v,S} \to \min. \end{cases} \tag{2}$$

Оказывается, что $\mathbf{OPT} \leq O(n) \cdot \mathbf{LP}$. Действительно, задача о системе пересадок — это частный случай задачи о покрытии множества: нам нужно покрыть множество пар $i,j \in \{0,1\}^n$ множествами вида $C_{v,S} := \{i,j \mid i,j \in S, v \in \mathcal{P}(i,j)\}$. Известно, что для задачи о покрытии множества линейная релаксация (2) дает мультипликативную погрешность порядка логарифма размера покрываемого множества (см., к примеру, [Vaz04]). Так как мы покрываем множество размера $2^{O(n)}$, то погрешность получается $O(n)$.

Рассмотрим теперь программу, которая является двойственной к (2). По теореме о сильной двойственности для задач линейного программирования ее оптимальное решение тоже равно $\mathbf{LP}$.

$$\begin{cases} y_{i,j} \geq 0 & \forall\, i,j \in \{0,1\}^n, \\ \sum_{\substack{i,j \in S \\ v \in \mathcal{P}(i,j)}} y_{i,j} \leq |S| & \forall\, v \in \{0,1\}^n, S \subseteq \{0,1\}^n, \\ \sum_{i,j} y_{i,j} \to \max. \end{cases} \tag{3}$$

Пояснение: здесь и далее в этом разделе индексы i,j пробегают *неупорядоченные* пары вершин. То есть всего в двойственной программе $2^n \cdot (2^n+1)/2$ переменных. Теперь усилим (3): а именно, потребуем, чтобы значения переменных $y_{i,j}$ зависели только от расстояния между i и j (назовем такие решения *регулярными*). Таким образом, у нас теперь будут переменные $\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n$. Обозначим N_d количество пар вершин, расстояние между которыми равно d. Тогда программа записывается так:

$$\begin{cases} \tilde{y}_d \geq 0 & \forall\, 0 \leq d \leq n, \\ \sum_{\substack{i,j \in S \\ 0^n \in \mathcal{P}(i,j)}} \tilde{y}_{d(i,j)} \leq |S| & \forall\, S \subseteq \{0,1\}^n, \\ \sum_d N_d \cdot \tilde{y}_d \to \max. \end{cases} \tag{4}$$

Мы оставили только ограничения с $v = 0^n$, потому что другие ограничения не дают ничего нового, так как нас теперь интересуют только длины путей. Обозначим оптимальное решение этой программы $\mathbf{RegularLP}$. Очевидно, что $\mathbf{RegularLP} \leq \mathbf{LP}$, так как программа (4) является усилением (3). Однако, верно и обратное неравенство.

Теорема 16.

$$\mathbf{LP} \leq \mathbf{RegularLP}$$

Доказательство. Пусть $y_{i,j}$ — решение (3). Мы хотим изготовить решение (4) с не меньшим значением целевой функции. Положим

$$\tilde{y}_d := \mathbf{E}_{d(i,j)=d}\left[y_{i,j}\right].$$

Очевидно, что

$$\sum_{i,j} y_{i,j} = \sum_d N_d \tilde{y}_d,$$

таким образом, остается доказать, что $\tilde{y}$ удовлетворяет всем ограничениям (4). Возьмем какое-то $S \subseteq \{0,1\}^n$. Мы хотим проверить, что

$$\sum_{\substack{i,j \in S \\ 0^n \in \mathcal{P}(i,j)}} \tilde{y}_{d(i,j)} \leq |S|. \tag{5}$$

Так как y — решение (3), то

$$\sum_{\substack{i,j \in S \\ 0^n \in \mathcal{P}(i,j)}} y_{i,j} \leq |S|.$$

Рассмотрим отображение $A\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$, которое является композицией отображения вида $x \mapsto x \oplus z$, где $z \in \{0,1\}^n$ — случайный вектор, и случайной перестановки координат.

Видно, во-первых, что A — биекция, во-вторых, A сохраняет все расстояния, а, в-третьих, если расстояние между какими-то вершинами $i, j \in \{0,1\}^n$ равно d, то пара $(A(i), A(j))$ распределена равномерно среди всех пар вершин на расстоянии d.

Рассмотрим следующую случайную величину:

$$X = \sum_{\substack{i,j \in A(S) \\ A(0^n) \in \mathcal{P}(i,j)}} y_{i,j}.$$

С одной стороны, так как A — биекция, а y — решение (3), то $\mathbf{E}_A\left[X\right] \leq |S|$. С другой стороны,

$$\mathbf{E}_A\left[X\right] = \mathbf{E}_A\left[\sum_{\substack{i,j \in A(S) \\ A(0^n) \in \mathcal{P}(i,j)}} y_{i,j}\right] = \mathbf{E}_A\left[\sum_{\substack{i,j \in S \\ 0^n \in \mathcal{P}(i,j)}} y_{A(i),A(j)}\right] =$$
$$= \sum_{\substack{i,j \in S \\ 0^n \in \mathcal{P}(i,j)}} \mathbf{E}_A\left[y_{A(i),A(j)}\right] = \sum_{\substack{i,j \in S \\ 0^n \in \mathcal{P}(i,j)}} \tilde{y}_{d(i,j)}.$$

В последнем переходе мы пользуемся тем, что пара $(A(i), A(j))$ распределена равномерно среди всех пар на расстоянии $d(i,j)$. Таким образом, (5) доказано. $\square$

Таким образом, получаем, что

$$\mathbf{RegularLP} \le \mathbf{OPT} \le O(n) \cdot \mathbf{RegularLP}.$$

Мы докажем, что $\mathbf{RegularLP} = 2.5^{(1+o(1))n}$.

Обозначим $\mathcal{O}$ политоп задачи (4). Обозначим

$$\tilde{y}_d^* := \max_{\tilde{y} \in \mathcal{O}} \tilde{y}_d.$$

Поясним: для каждого d мы выбрали $\tilde{y}_d^*$ — наибольшее из всех допустимых значений $\tilde{y}_d$. Очевидно, что

$$\max_d (N_d \cdot \tilde{y}_d^*) \le \mathbf{RegularLP} \le O(n) \cdot \max_d (N_d \cdot \tilde{y}_d^*).$$

Поэтому остается лишь доказать, что $\max_d (N_d \cdot \tilde{y}_d^*) = 2.5^{(1+o(1))n}$. Очевидно верна следующая формула для N_d:

$$N_d = \begin{cases} 2^n & d = 0 \\ 2^{n-1} \cdot \binom{n}{d} & d > 0. \end{cases}$$

Нам потребуется лемма, которая может иметь и самостоятельный интерес:

Лемма 4. *В регулярном графе плотность любого подграфа не превосходит плотности всего графа. В двудольном графе, в котором в каждой доле вершины имеют одинаковую степень, плотность любого подграфа не превосходит плотности всего графа.*

Доказательство. Оценив степень каждой вершины подграфа степенью в исходном графе, получим верхнюю оценку на число рёбер в подграфе, а из этого — что плотность подграфа не превосходит плотности всего графа.

Докажем теперь утверждение про двудольные графы. Действительно, пусть в одной доле p вершин, а в другой — q вершин. Пусть в доле с p вершинами у всех вершин степень d. Рассмотрим подграф такой, что в нем u вершин из первой доли и v вершин из второй. Если в обеих долях подграфа есть вершины не максимальной степени (меньше d и pd/q, соответственно), то будем добавлять ребра между такими вершинами, пока такие пары остаются. Не умаляя общности, считаем, что все вершины в первой доле подграфа имеют степень d. Так как все степени подграфа во второй доле не превосходят pd/q, то имеем $ud \le vpd/q$, то есть $uq \le vp$. Отсюда получаем, что $ud/(u+v) \le pd/(p+q)$, но это значит, что подграф не более плотный, чем целый граф. □

Теперь явно вычислим $\tilde{y}_d^*$.

Лемма 5.
$$\tilde{y}_d^* = \begin{cases} 1 & d = 0 \\ 2/\binom{n-k}{k} & d = 2k, k > 0 \\ \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\right) / \left(\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{k+1}\right) & d = 2k+1. \end{cases}$$

Доказательство. Если отождествить $\{0,1\}^n$ с подмножествами $[n]$, то можно заметить, что условие $0^n \in \mathcal{P}(i,j)$ эквивалентно условию непересекаемости соответствующих множеств.

Сперва докажем нижние оценки. Для этого рассмотрим граф, вершинами которого будут подмножества $[n]$, а ребра будут соединять подмножества, которые не пересекаются, и сумма размеров которых составляет d. Для доказательства нижних оценок достаточно показать, что подграфы, индуцированные $S := \{A \subseteq [n] \mid |A| = k\}$ для $d = 2k$ и $S := \{A \subseteq [n] \mid k \leq |A| \leq k+1\}$ для $d = 2k+1$, являются подграфами наибольшей плотности в нашем графе.

Для этого повнимательнее посмотрим на структуру графа. Его компоненты связности — это множества $V_l := \{A \subseteq [n] \mid |A| = l\} \cup \{A \subseteq [n] \mid |A| = d - l\}$. По лемме 4 наиболее плотные подграфы V_l — это сами V_l. А из леммы 6 следует, что среди всех V_l наибольшей плотностью обладает компонента $V_{\lfloor d/2 \rfloor}$.

Соответствующие верхние оценки очевидны. Действительно, для этого достаточно посмотреть на ограничения, задаваемые компонентами $V_{\lfloor d/2 \rfloor}$.

$\square$

Итак, нам остается понять, каков максимум выражения

$$N_d \cdot \tilde{y}_d^* = 2^n \cdot \begin{cases} \binom{n}{2k}/\binom{n-k}{k} & d = 2k \\ \binom{n}{2k+1} \cdot \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\right) / \left(2 \cdot \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{k+1}\right) & d = 2k+1. \end{cases}$$

Несложно проверить, что в обоих случаях максимум достигается на $k = (1+o(1))n/5$. Воспользовавшись формулой $\binom{n}{\alpha n} = 2^{n(H(\alpha)+o(1))}$, где

$$H(\alpha) = -\alpha \log_2(\alpha) - (1-\alpha)\log_2(1-\alpha),$$

получаем, что $\max_d N_d \cdot \tilde{y}_d^* = 2.5^{(1+o(1))n}$.

Лемма 6. *Максимум выражения*

$$\binom{n}{l} \cdot \binom{n-l}{d-l} / \left(\binom{n}{l} + \binom{n}{d-l}\right)$$

при фиксированных n и d достигается при $l = \lfloor d/2 \rfloor$.

Доказательство. Обозначим $h = d/2 - l$ и распишем биномиальные коэффициенты. Получим

$$\frac{1}{(n-d)!} \cdot \frac{1}{\frac{(d/2+h)!}{(n-(d/2-h))!} + \frac{(d/2-h)!}{(n-(d/2+h))!}}.$$

Мы хотим минимизировать знаменатель второй дроби. Обозначим его слагаемые t и s соответственно. При увеличении h на 1 первое слагаемое в нём увеличивается в $\alpha = (d/2+h)(n-(d/2-h))$ раз, а второе — уменьшается в $\beta = (d/2-h)(n-(d/2+h))$ раз. Ясно, что $\alpha \geq \beta$.

Докажем, что если $t \geq s \geq 0$, и $\alpha > \beta \geq 1$ то $\alpha t + \frac{1}{\beta}s \geq t + s$. Действительно, хотим показать, что $(\alpha-1)t \geq (1-\frac{1}{\beta})s$. Достаточно, чтобы выполнялось $(\alpha - 1) \geq (1 - \frac{1}{\beta})$, а это верно, поскольку $2 \leq \alpha + \frac{1}{\alpha} \leq \alpha + \frac{1}{\beta}$.

Мы показали, что при увеличении h на 1 знаменатель увеличивается. При минимальном h имеем либо $t = s = \frac{p!}{(n-p)!}$, если $d = 2k$, либо $t = \frac{(\lfloor d/2 \rfloor + 1)!}{(n - \lfloor d/2 \rfloor)!}$, $s = \frac{\lfloor d/2 \rfloor !}{(n-(\lfloor d/2 \rfloor + 1))!}$ (и $t > s$), если $d = 2k+1$. Следовательно, минимум знаменателя достигается при минимальном h, т.е. при $l = \lfloor d/2 \rfloor$. $\square$

4 Открытые вопросы

В заключение мы сформулируем несколько открытых вопросов.

- Между оценками теоремы 3 и теоремы 4 остается довольно существенный зазор. Первый вопрос состоит в выяснении точной оценки на размер минимального ε-покрытия.

- Теорема 3 дает ε-покрытия размера $O(\log(1/\varepsilon)/\varepsilon)$, теорема 4 показывает, что эту оценку нельзя улучшить до $O(1/\varepsilon)$. В то же время, теорема 9 дает ε-покрытия размера $O(1/\varepsilon)$ для графов ограниченной древесной ширины.

  Для каких естественных классов графов верна верхняя оценка $O(1/\varepsilon)$ на размеры ε-покрытий? Верна ли линейная верхняя оценка для планарных графов? Для графов, которые не содержат фиксированный граф как минор? Для частного случая единичных весов утвердительный ответ на последний вопрос дает основная теорема из [KPR93].

- Можно ли избавиться в теореме 14 от зависимости от n в размерности образа?

- Можно ли доказать аналог теоремы 14 для произвольного ℓ_p, а не только для случая $p = 1$?

- В разделе 3 мы доказали существование системы пересадок размера $2.5^{(1+o(1))n}$ для булева куба, не строив ее явно. Можно ли построить явную систему пересадок такого размера? Видно, что имеющееся доказательство верхней оценки дважды неконструктивно: первая неконструктивность возникает при доказательстве неравенства $\mathbf{OPT} \le O(n) \cdot \mathbf{LP}$, а вторая состоит в том, что мы доказываем существование хорошего решения программы 2 с помощью отсутствия хорошего решения у программы 3.

Список литературы

[ABC+05] Ittai Abraham, Yair Bartal, T-H. Hubert Chan, Kedar Dhamdhere, Anupam Gupta, Jon Kleinberg, Ofer Neiman, and Aleksandrs Slivkins. Metric Embeddings with Relaxed Guarantees. FOCS '05, pages 83–100. IEEE Computer Society, 2005.

[ADF+11] Ittai Abraham, Daniel Delling, Amos Fiat, Andrew Goldberg, and Renato Werneck. VC-Dimension and Shortest Path Algorithms. In *Automata, Languages and Programming*, volume 6755, pages 690–699. Springer Berlin / Heidelberg, 2011.

[ADGW11] Ittai Abraham, Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, and Renato Fonseca F. Werneck. A Hub-Based Labeling Algorithm for Shortest Paths in Road Networks. In *SEA*, pages 230–241, 2011.

[AFGW10] Ittai Abraham, Amos Fiat, Andrew V. Goldberg, and Renato Fonseca F. Werneck. Highway Dimension, Shortest Paths, and Provably Efficient Algorithms. In *SODA*, pages 782–793, 2010.

[ALN05] Sanjeev Arora, James R. Lee, and Assaf Naor. Euclidean distortion and the sparsest cut. In *Proceedings of the thirty-seventh annual ACM symposium on Theory of computing*, STOC '05, pages 553–562. ACM, 2005.

[Alo10] Noga Alon. A Non-linear Lower Bound for Planar Epsilon-Nets. In *Foundations of Computer Science (FOCS), 2010 51st Annual IEEE Symposium on*, pages 341–346, 2010.

[AS92] Noga Alon and Joel H. Spencer. *The Probabilistic Method.* Wiley, New York, 1992.

[BFM+07] Holger Bast, Stefan Funke, Domagoj Matijevic, Peter Sanders, and Dominik Schultes. In Transit to Constant Time Shortest-Path Queries in Road Networks. In *ALENEX*, 2007.

[Bou85] J. Bourgain. On lipschitz embedding of finite metric spaces in Hilbert space. *Israel Journal of Mathematics*, 52:46–52, 1985.

[CHKZ02] Edith Cohen, Eran Halperin, Haim Kaplan, and Uri Zwick. Reachability and distance queries via 2-hop labels. SODA '02, pages 937–946. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.

[GKL03] Anupam Gupta, Robert Krauthgamer, and James R. Lee. Bounded geometries, fractals, and low-distortion embeddings. In *FOCS*, pages 534–543, 2003.

[HW86] David Haussler and Emo Welzl. Epsilon-nets and simplex range queries. In *Proceedings of the second annual symposium on Computational geometry*, SCG '86, pages 61–71. ACM, 1986.

[KPR93] Philip N. Klein, Serge A. Plotkin, and Satish Rao. Excluded minors, network decomposition, and multicommodity flow. In *STOC*, pages 682–690, 1993.

[Mat02] Jiří Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*. Springer-Verlag New York, Inc., 2002.

[Pol09] D.H.J. Polymath. A new proof of the density Hales-Jewett theorem. Preprint, 2009.

[Rao99] Satish Rao. Small Distortion and Volume Preserving Embeddings for Planar and Euclidean Metrics. In *Symposium on Computational Geometry*, pages 300–306, 1999.

[TZ05] Mikkel Thorup and Uri Zwick. Approximate distance oracles. *J. ACM*, 52(1):1–24, 2005.

[Vaz04] Vijay V. Vazirani. *Approximation Algorithms*. Springer, 2004.

[VC71] V.N. Vapnik and A.Y. Chervonenkis. On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities. *Theory of Probability and Its Applications*, 16(2):264–280, 1971.